

KLASIČNI USLOVI PLASTIČNOG TEČENJA TLA I OPRAVDANOST NJIHOVE PRIMENE U ODREĐIVANJU OPTEREĆENJA LOMA TLA

Miroljub Samardaković

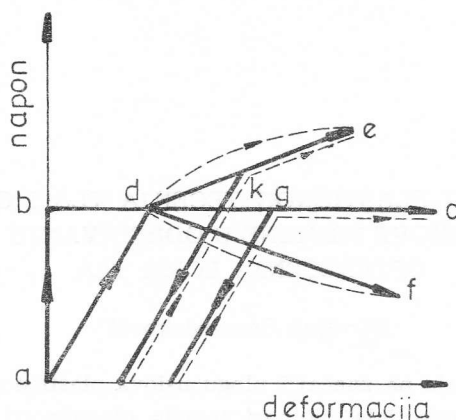
U radu se ukazuje na značaj i ulogu uslova plastičnog tečenja u nelinearnom modeliranju materijala na bazi teorije plastičnosti i opisuje se opšti uslov tečenja za izotropan materijal sa osvrtom na fenomen ojačavanja. Dati su klasični uslovi tečenja tla i izveden novi oblik uslova Mohr-Coulomb-a kao opšta funkcija tečenja iz koje proizilaze ostale kao specijalni slučajevi. Na osnovu opterećenja loma tla sračunatog metodom konačnih elemenata za razne uslove tečenja i eksperimentalnih rezultata iz literature, zaključuje se o opravdanosti primene pojedinih uslova u određivanju nosivosti tla.

U V O D

U teorijskom (analitičkom, numeričkom) tretiranju geotehničkih problema osnovni problem je odabrati tzv. konstitutivne zakone tla. Oni su predstavljeni relacijama između fizičkih veličina kao što su naponi, deformacije i vreme i invarijantne su od transformacija koje se odnose na pravougli koordinantni sistem (Thomas, 1961). Različite šeme za definisanje konstitutivnih zakona tla kao nelinearnog materijala za sada prikazuju krivu napon-deformacija koristeći: a) metod podesnih krivih, interpolacije ili matematičkih funkcija, b) teoriju nelinearne elastičnosti i c) teorije idealne plastičnosti i plastičnosti sa ojačavanjem dok postupak obuhvatanja fenomena slabljenja još nije razvijen.

U Mehanici tla teorija plastičnosti se primenjuje pre svega radi razmatranja stanja napona u tlu plastičnog stanja, na osnovu čega se rešavaju problemi stabilnosti tla (nosivost, pritisci na objekte, stabilnost prirodnih i veštačkih kosina). U teoriji plastičnosti tla uvedene su idealizacije kao na Sl. 1.

Prvo je uveden krutoplastičan model (abc), zatim elastoplastičan (adc) a onda elastoplastičan sa »ojačavanjem« (ade) i elastoplastičan sa »slabljenjem« (adf), koji vernije prikazuju stvarno ponašanje tla posmatranog kao



Sl. 1. Idealizovane deformacione krive tla

deo objekta ili modela ili kao uzorak u konvencionalnim i modernim laboratorijskim ogledima. Očigledno je da je od fundamentalnog značaja za primenu teorije plastičnosti odrediti uslove u kojima se tlo nalazi u tačkama b, d ili k, posle kojih nastaje nepovratan deo deformacije. Tlo tada pri vrlo malom povećanju napona »popušta« i počinje plastično da se deformiše a rezultat je sukcesivno deformisanje koje može biti definisano kao »tečenje«. Posle granice popuštanja (u literaturi granica tečenja) deformacije se povećavaju dok ne dođe do razaranja stvaranjem jasno određenih površina razdvajanja u materijalu ili dok pomeranja nekih tačaka ne postanu toliko velika da bivaju štetna. U oba krajnja slučaja kaže se da je došlo do »loma«. Dakle, razlika između popuštanja i loma tla može se pojednostavljeno potražiti u definiciji opšteg stanja tla za vreme deformacija pod opterećenjem i u posledicama deformisanja. U »krtim« materijalima ili, bolje rečeno, u materijalima koji su u krtom stanju (a pod određenim uslovima takav može biti svaki materijal) (Gastev, 1966), događa se razaranje tj. lom tako reći bez popuštanja dok se u »žilavim« materijalima lom događa bez razaranja.

U nekoherentnom, zbijenijem tlu plastično popuštanje i tečenje ima mali udeo u lomu. Zbog toga se smatra da se u ovom tlu događa lom razaranjem i da su za određivanje uslova (ne)stabilnosti merodavne teorije loma.

U koherentnom tlu, zbog drugačije strukture i testure, događa se sukcesivno plastično popuštanje (može se reći progresivan lom) usled velikih deformacija, pa je lom posledica tečenja a ako se jave zone smicanja one imaju drugačiji karakter od onih u nekoherentnom tlu. Kod koherentnog tla krive napon-deformacija zavisne su od vremena i temperature više nego kod nekoherentnog tla a kako je poznato postoje i mnogi drugi uticajni faktori.

Zbog zrnastog sastava tla plastične deformacije su rezultat međusobnog pomeranja (kotrljanja i klizanja) zrna i ono se događa usled dejstva pre svega smičućih napona. Ovakve deformacije ostaju nepovratne zbog trenja između

zrna. Tako je za tečenje i lom tla merodavna čvrstoća na smicanje τ_f koja bi kompletno bila prikazana (Mitchel, 1976) kao

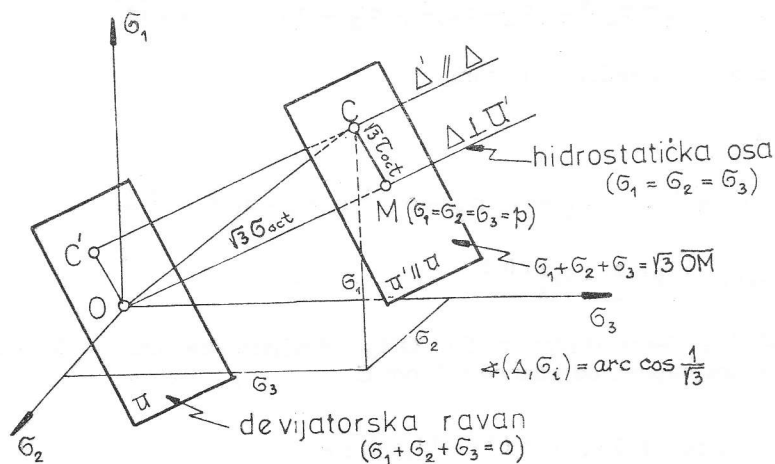
$$\tau_f = F(e, \Phi', C, \sigma', c', H, T, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, S)$$

gde su: e — koeficijent poroznosti, Φ' — efektivan ugao unutrašnjeg trenja C — sastav, σ' — efektivan normalan napon na površini smicanja, c' — efektivna kohezija, H — istorija opterećenja, T — temperatura, ε i $\dot{\varepsilon}$ — veličina i brzina deformacije i S — struktura tla. Ovakvu jednačinu za tačku b ili d (sl. 1) nemoguće je dobiti. Zato se uslov tečenja još uvek vezuje za eksperimentom određena stanja napona u tački čija okolina počinje da popušta i u opštem slučaju iskazuje kao funkcija komponentalnih napona ili, za izotropan materijal za koji orijentacija glavnih osa nije od značaja, glavnih normalnih napona za stanja koja odgovaraju tačkama b ili d.

Ako su σ_1 , σ_2 i σ_3 glavni normalni naponi u tački tela, ovakvo stanje napona može se grafički prikazati u tzv. Haigh-Westergaard-ovom prostoru napona, sa ortogonalnim koordinatnim sistemom σ_1 , σ_2 , σ_3 (Mendelson, 1968, prema Westergaard-u, 1920), što omogućava brzi uvid u odnos između algebarskih veličina glavnih napona i stanja napona.

PRIKAZIVANJE STANJA NAPONA U PROSTORU GLAVNIH NAPONA

Ako stanje napona u nekoj tački mase tla karakterišu naponi σ_1 , σ_2 , σ_3 , u prostoru napona kao na sl. 2 ovakvo stanje prikazano je »tačkom napona« C .



Sl. 2. Tačka napona (C) u prostoru napona

Ako je sekularna jednačina data u obliku

$$\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 - I_2 \sigma_i - I_3 = 0 \quad (i=1,2,3)$$

tada su invarijante tenzora napona za ovo stanje napona

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1)$$

$$I_2 = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \quad (2)$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (3)$$

a invarijante tenzora devijatorskih komponenti napona

$$J_1 = 0 \quad (4)$$

$$J_2 = (1/6) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = I_2 + I_1^2/3, \quad (5)$$

$$J_3 = (\sigma_1 - p)(\sigma_2 - p)(\sigma_3 - p) = I_3 + I_1 I_2/3 + 2 I_1^3/27 \quad (6)$$

gde je srednji napon, koji se može posmatrati kao invarijanta,

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = I_1/3 \quad (7)$$

Pored p kao novu invarijantu uvešćemo i generalisani napon smicanja

$$q = (1/\sqrt{2}) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{0,5} = \sqrt{3} J_2 \quad (7')$$

Kako su oktaedarski naponi

$$\sigma_{oct} = I_1/3 \quad (8)$$

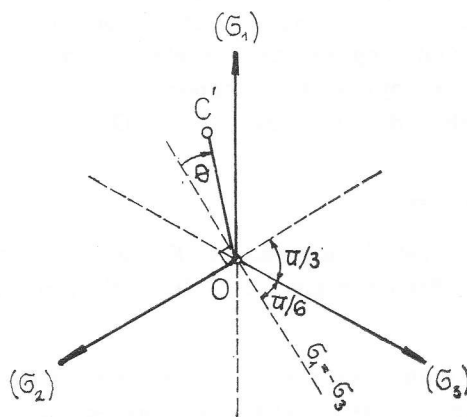
$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= (1/3) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{0,5} = \\ &= (1/3) [2(I_1^2 + 3I_2^2)]^{0,5} \end{aligned} \quad (9)$$

to su veličine sferne (hidrostatičke, $\overline{OM}$) i devijatorske ($\overline{OC'} = \overline{MC}$) komponente vektora napona određenog tačkom C

$$\overline{OM} = \sqrt{3} \sigma_{oct} = (1/\sqrt{3}) I_1 = \sqrt{3} p \quad (10)$$

$$\overline{OC'} = \sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{2} J_2 = \sqrt{2/3} q \quad (11)$$

Sferna komponenta »utiče« na promenu zapremine elementarne prizme u okolini tačke čije stanje napona posmatramo, a devijatorska »dovodi« do promene oblika prizme, dakle do ugaonih deformacija koje karakterišu plastično tečenje. Pošto tlo nema jednaku čvrstoću pri kompresiji i ekstenziji potrebno je da uz veličinu devijatorske komponente budu poznati i njen pravac i smer pri mogućoj rotaciji oko hidrostatičke ose, na osnovu kojih zaključujemo o vidu naponskog stanja. Zbog toga se položaj tačke C posmatra preko njene projekcije (C') u devijatorskoj ravni (Sl. 3) na koju se koordinatne ose projektuju kao (σ_1) , (σ_2) i (σ_3) .



Sl. 3. Projekcija u devijatorskoj ravni

Položaj C' određen je napred datom veličinom $\overline{OC'}$ i uglom Θ koji se može nazvati »uglom vida naponskog stanja« (Kačanov, 1956) ili »uglom Lode-a« (Nayak i Zienkiewicz, 1972, prema Lode, 1926).

Kao pogodna alternativa trećoj invarijanti (J_3) on može biti određen iz

$$\sin 3\Theta = 3\sqrt{3}J_3/2\sqrt{J_2^3} = 27J_3/2q^3 \quad (-\pi/6 \leq \Theta \leq \pi/6) \quad (12)$$

Naylor (1978) prema Hill-u (1950) nanosi ovaj ugao od ravni $\sigma_1 = -\sigma_3$ a veličina zavisi od koeficijenta napona (parametra Lode-a) μ_2 :

$$\tan \Theta = -(1/\sqrt{3})\mu_2 = -(1/\sqrt{3})(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (13)$$

Kako se vidi, stanje napona tj. položaj tačke napona C prikazan je jednačinama (10), (11) i (12) i zavisi od standardnih invarijanti odnosno od invarijanti p, q i Θ .

Na Sl. 4. prikazani u i mogući pravci i smerovi priraštaja napona za pojedine materijale. Priraštaji u pravcu tangente ne utiču na stanje deformacije.

Za elastičan materijal sa ojačavanjem uslov tečenja bi imao oblik

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, E) = 0 \quad (15)$$

gde E predstavlja sve parametre ojačavanja koji se različito prikazuju i u najviše slučajeva su funkcije istorije naprezanja i deformisanja.

Princip najvećeg plastičnog rada (napr. Salencon, 1974, prema Hill-u, 1950) ukazuje da je površina tečenja konveksna i da je vektor priraštaja plastične deformacije ($d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij} - d\epsilon_{ij}^e$), u prostoru $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ koji se za izotropno tlo poklapa sa prostorom napona, spoljašnja normala površine tečenja (Sl. 4).

Kako za ovakav materijal uslov tečenja ne zavisi od pravaca glavnih napona i, naravno, od njihove numeracije, on je simetrična funkcija σ_1, σ_2 i σ_3 sa hidrostatičkom osom kao osom simetrije. Pošto su invarijante stanja napona funkcije glavnih napona, to uslov tečenja pišemo kao $f(I_1, I_2, I_3) = 0$ ili, što je isto, kao

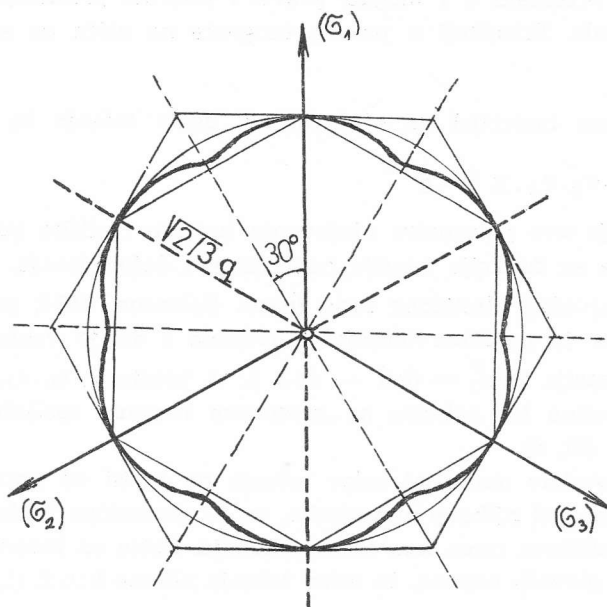
$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (16)$$

Kad tačka napona C na Sl. 2 i Sl. 3 odgovara stanju napona na granici plastičnosti, onda invarijante p, q i Θ (koje odgovaraju invarijantama I_1, J_2 i J_3) mogu da posluže za analizu oblika površine tečenja jer je tačka C na njoj. Uslov tečenja (16) postaje

$$f(p, q, \Theta) = 0 \quad (17)$$

Ako se u (16) ili (17) ne javlja I_1 jer vrlo malo utiče na promenu oblika elementarne prizme, uslov $f(J_2, J_3) = 0$ predstavlja cilindar sa izvodnicom paralelnom hidrostatičkoj osi kao osi simetrije a oblik linije tečenja zavisi od J_2 i J_3 , i to, pre svega, od razlike glavnih napona. Za materijal koji se ponaša jednako pri pritisku i istezanju lako se pokazuje (Kačanov, 1956, Radnković, 1960, Mendelson, 1968) da linija tečenja umesto tri ose (σ_1), (σ_2) i (σ_3) ima šest osa, simetrije (Sl. 5), da je konveksna i ima isti oblik u svakom od dvanaest sektora od 30° i da leži između šestougona upisanog i opisanog za krug poluprečnika $\overline{OC} = \sqrt{2/3} \cdot q$.

Ako se zanemare I_1 i J_3 odstojanja tačaka napona od hidrostatičke ose su jednaka i ne zavise od Θ pa uslov $f(I_2) = 0$ predstavlja rotacionu površinu — kružni cilindar.



Sl. 5. Opšti oblik linije tečenja za idealan materijal

Kad ne učestvuje invarijanta J_3 uslov $f(I, J_2) = 0$ predstavlja rotacionu površinu — konus ili rotacioni paraboloid sa temenom u oktantu negativnih-zateznih glavnih napona, u kome zahvata mali deo prostora $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 < 0$, što odgovara fizičkom ponašanju tla.

U oktantu pozitivnih glavnih napona prostor $f(I, J_2) \leq 0$, ograničen kao i ostali razlikom glavnih napona, nije zatvoren. To ne odgovara fizičkom ponašanju tla u kome veliki naponi uzrokuju plastifikaciju zrna na kontaktu sa ostalim a onda i lom zrna tako da lom tla može da nastane i pri hidrostatičkom stanju napona.

KLASIČNI USLOVI TEČENJA TLA

Kako je dobro poznato, od klasičnih hipoteza tečenja-loma nije opravdano za tlo primeniti hipoteze najvećeg normalnog napona, najveće dilatacije i najvećeg deformacionog rada.

Autori i istraživači u teorijskoj i primenjenoj Mehanici tla pokazuju da od klasičnih hipoteza za razne vrste i stanja tla najviše odgovara uslov loma Mohr-Coulomb-a.

Zbog jednostavnije primene (naročito u numeričkom rešavanju problema stabilnosti) ima smisla primenjivati i hipoteze najvećeg napona smicanja (Tresca-e) i najvećeg rada na primeni oblika (Von Mises-a). Newmark (1960) vrši početna upoređenja ovih uslova, opšti uvid u ovu problematiku za tlo daju Yong i Warkentin (1975) a detaljno upoređenje i proširenje poslednja

tri uslova loma čine Bishop (1966, 1971) i drugi autori. Chen (1975), Zienkiewicz i dr. (1975), Zeinkiewicz i Pande (1975), Christian i Desai (1977), Zienkiewicz i Humpheson (1977), Zienkiewicz i dr. (1977) i Naylor (1978), čije radove koristimo u daljem izlaganju, ova tri uslova loma proširuju, uopštavaju, primenjuju u numeričkom rešavanju problema stabilnosti i upoređuju takva rešenja. Prikazaćemo ovde neke od posebnih uslova i površina tečenja, aktuelne u definisanju graničnog stanja i plastičnog ponašanja tla.

a) USLOV TRESCA-E

Pošto eksperimenti pokazuju da za (početno) izotropan materijal u kome se ne događa krti lom funkcija tečenja zavisi samo od devijatorske komponente tenzora napona, ona se za $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ daje kao

$$\sigma_1 - \sigma_3 = |2k| \quad \text{ili} \quad \tau_{\max} = |k| \quad (18)$$

u kojoj srednji glavni napon ne učestvuje.

Ako obeležavanje glavnih napona nije vezano za njihove veličine, uslov (18) može da se uopšti kao

$$f = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2] = 0 \quad (19)$$

koji je u prostoru napona predstavljen šestostranim cilindrom sa hidrostatičkom osom kao osom simetrije. Njegov presek sa devijatorskom ravni je pravilan šestougao sa stranom $2k/\sqrt{2/3}$ (Sl. 6). Ako je pri čistom smicanju uzorak počeo da teče pri naponu σ a pri linearnom stanju napona pri σ_T tada je $k = \sigma_s = \sigma_T/2$.

Prager i Hodge (1951) pokazuju da je uslov Tresca-e

$$f = 4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0 \quad (20)$$

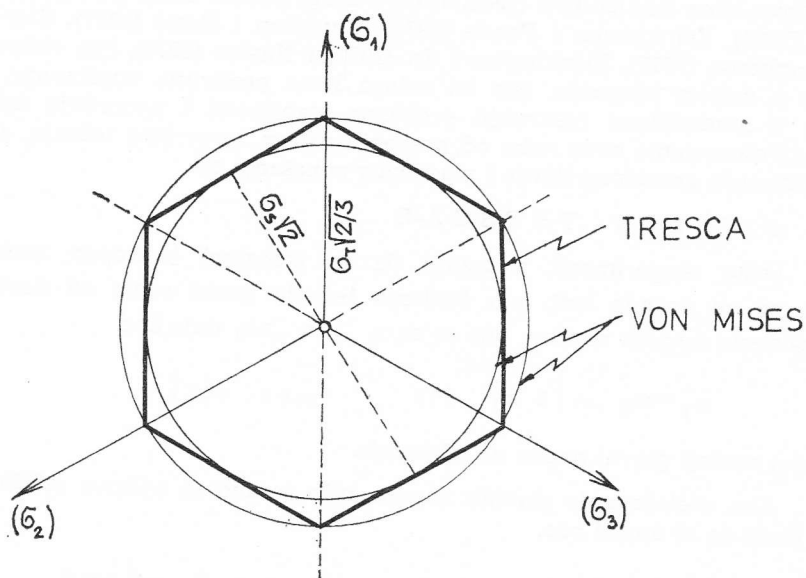
ali Salencon (1974) tvrdi da ovako dat uslov nije tačan, da zatvoreni oblik tipa $f(J_2, J_3) = 0$ ekvivalentan (20) ne postoji ali i da nije od praktičnog značaja.

b) USLOV VON MISES-A

Za isti materijal najjednostavniji oblik uslova tečenja zavisao od devijatorske komponente tenzora napona dat je kao

$$f = J_2 - k^2 = 0 \quad (21)$$

i predstavljen prema ranijem tumačenju rotacionom površinom-kružnim cilindrom sa hidrostatičkom osom kao osom simetrije i poluprečnikom $r = k/\sqrt{2}$. Ako je σ_T merodavna čvrstoća materijala onda je $k = \sigma_T/\sqrt{3}$ pa je cilindar Von Mises-a »opisan« oko cilindra Tresca-e. Za merodavnu čvrstoću σ_s kružni cilindar je upisan, što se u devijatorskoj ravni vidi kao na Sl. 6.



Sl. 6. Površine Von Mises-a i Tresca-e projektovane na devijatorsku ravan

c) USLOV MOHR-COULOMB-A

Zanemarivši uticaj srednjeg glavnog napona i usvojivši linearnu vezu između normalnog (σ_n) i smičućeg (τ_n) napona u ravni tečenja-loma, može da se napiše

$$|\tau_n| = c + \sigma_n \operatorname{tg} \varnothing \quad (22)$$

gde je kohezija (c) odsečak ove prave na osi τ_n na dijagramu (σ_n, τ_n) a ugao unutrašnjeg trenja ($\varnothing$) ugao nagiba prave prema osi σ_n . Uslov (22) ima i poznati oblik

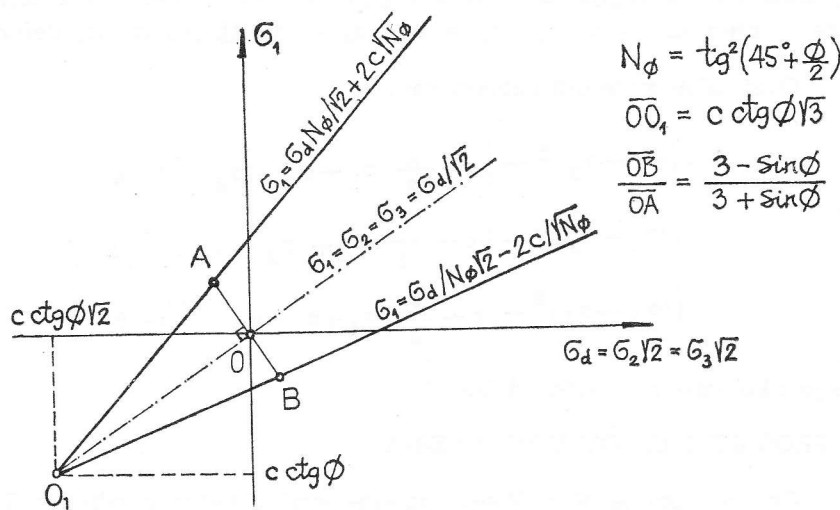
$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2c \cos \varnothing + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varnothing \quad (23)$$

koji, analogno uslovu (20), može da se izrazi funkcijom

$$f = \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \left[2c \cos \varnothing + (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varnothing \right]^2 \right\} \times \\ \left\{ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \left[2c \cos \varnothing + (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \varnothing \right]^2 \right\} \times \\ \left\{ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \left[2c \cos \varnothing + (\sigma_3 + \sigma_1) \sin \varnothing \right]^2 \right\} = 0 \quad (24)$$

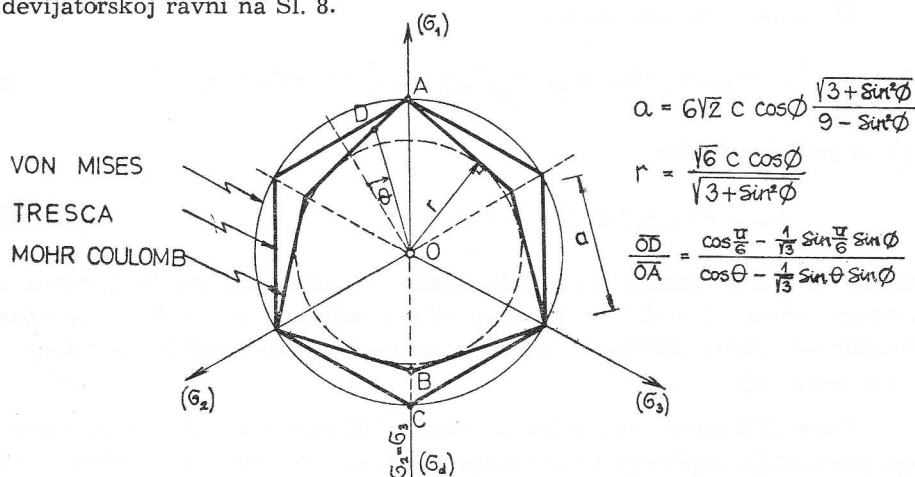
Ovaj uslov u prostoru napona predstavljen je šestougaonim rogljem sa tri ravni simetrije određene hidrostatičkom i po jednom koordinatnom osom. Za $\phi = 0$ ova površina postaje ekvivalentna površini Tresca-e. Parametri čvrstoće c i ϕ određuju se standardnim geomehničkim ogledima.

Presek Mohr-Coulombovog roglja i ravni simetrije $\sigma_2 = \sigma_3$ kao i sa devijatorskom ravni, u toj ravni simetrije dat je na Sl. 7.



Sl. 7. Presek Mohr-Coulomb-ove površine i ravni simetrije $\sigma_2 = \sigma_3$

Za upoređenje navedenih površina tečenja date su njihove linije tečenja u devijatorskoj ravni na Sl. 8.



SL. 8

Sl. 8. Linije tečenja za različite uslove tečenja u devijatorskoj ravni $\tau_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

d) PROŠIRENI USLOV TRESCA-E

Pošto uslov Mohr-Columb-a obuhvata uticaj hidrostatskog pritiska preko I_1 i kao takav više odgovara za tlo nego jednostavniji uslov Tresca-e (pogodniji za metale), Drucker (1953) uvodi površinu tečenja u obliku pravilnog šestougaoznog roglja. On leži u roglju Mohr-Columb-a i ima zajedničke tačke sa njim za $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_2 = \sigma_3$ i $\sigma_3 = \sigma_1$ tj. pri ravnoj deformaciji.

Ovaj uslov može biti napisan kao:

$$\begin{aligned} f = & \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \left[c + \frac{k}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 \right\} \cdot x \\ & \left\{ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \left[c + \frac{k}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 \right\} \cdot x \\ & \left\{ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \left[c + \frac{k}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (24')$$

gde je c kohezija a k zavisi od $\sin \varnothing$.

e) PROŠIRENI USLOV VON MISES-A

Onako kako je Von Mises »upisao« svoj cilindar u cilindar Tresca-e tako su Drucker i Prager (1952) uveli prošireni uslov Von Mises-a, predstavljen pravim kružnim konusom upisanim ili opisanim oko roglja proširenog uslova Tresca-e (saglasno Sl. 6).

Uslov se može napisati kao

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \left[c + \frac{k}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 \quad (25)$$

ili u originalnom obliku

$$f = -\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (26)$$

gde su α i k konstante materijala. Kako je uobičajeno da se čvrstoća tla iskazuje prema Mohr-Coulomb-ovom uslovu, odnosno preko kohezije i ugla unutrašnjeg trenja određenih konvencionalnim geomehaničkim ogledima, to α i k zavise od $\varnothing$ i c .

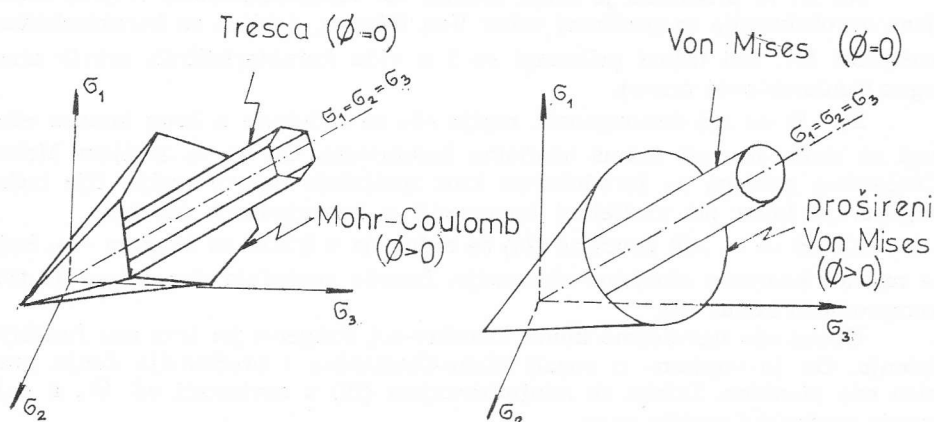
Uslov (26) naziva se i uslov Drucker-a i Prager-a a prikazan je konusom koji predstavlja uopštenje i zaobljenje neprirodno izlomljene površine tečenja Mohr-Coulomb-a i to za slučaj ravne deformacije. Tada su parametri

$$\alpha = \frac{\sin \varnothing}{\sqrt{3(3 + \sin^2 \varnothing)}} = \frac{\operatorname{tg} \varnothing}{\sqrt{3(3 + 4 \operatorname{tg}^2 \varnothing)}} \quad (27)$$

$$k = \frac{c\sqrt{3} \cos \varnothing}{\sqrt{3 + \sin^2 \varnothing}} = \frac{\sqrt{3} c}{\sqrt{3 + 4 \tan^2 \varnothing}} \quad (27')$$

a konus je upisan u rogalj Mohr-Coulomb-a. Iz (26) se vidi da se za $\alpha = 0$ konus redukuje u cilindar Von Mises-a.

Na Sl. 9 grafički su prikazani klasični uslovi tečenja tla i njihove mogućnosti za obuhvatanje uticaja unutrašnjeg trenja.



Sl. 9. Klasične površine tečenja tla

OPŠTI OBLIK KLASIČNIH USLOVA TEČENJA TLA

Ako glavne normalne napone odredimo preko invarijanti p , q i $-\pi/6 \leq \Theta \leq \pi/6$ iz (7) i (7') i (12) uz Sl. 3. dobićemo

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} q \begin{Bmatrix} \sin(-\Theta + 2\pi/3) \\ \sin(-\Theta) \\ \sin(-\Theta + 4\pi/3) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p \\ p \\ p \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Kad ove izraze za napone unesemo u bilo koji uslov tečenja on postaje funkcija invarijanti p , q i Θ . Ova funkcija ima jedinstven opšti oblik u kome se veličine parametara menjaju zavisno od uslova tečenja.

Ako napone iz (28) uvrstimo u (23) dobićemo uslov tečenja Mohr-Coulomb-a

$$f = q - Mp - N = 0 \quad (29)$$

$$M = 3 \sin \varnothing / (\sqrt{3} \cos \Theta - \sin \Theta \sin \varnothing) \quad (30)$$

$$N = 3c \cos \varnothing / (\sqrt{3} \cos \Theta - \sin \Theta \sin \varnothing) \quad (30')$$

Funkcija (29) predstavlja opšti oblik navedenih klasičnih uslova tečenja tla, jer za $\Theta = \text{const}$ dobijamo izvodnicu Mohr-Coulomb-a (kao uslova koji najviše odgovara za tlo), a kad nju usvojimo za izvodnicu konusa, koji je funkcija p, q i $\Theta = \text{const}$, dobijamo prošireni uslov Von Mises-a. Ostaje, dakle, da se opredelimo za Θ koje odgovara vrsti naprezanja tla i da onda u numerički aparat za rešavanje problema stabilnosti umesto uslova Mohr-Coulomb-a uvedemo jednostavniji prošireni uslov Von Mises-a.

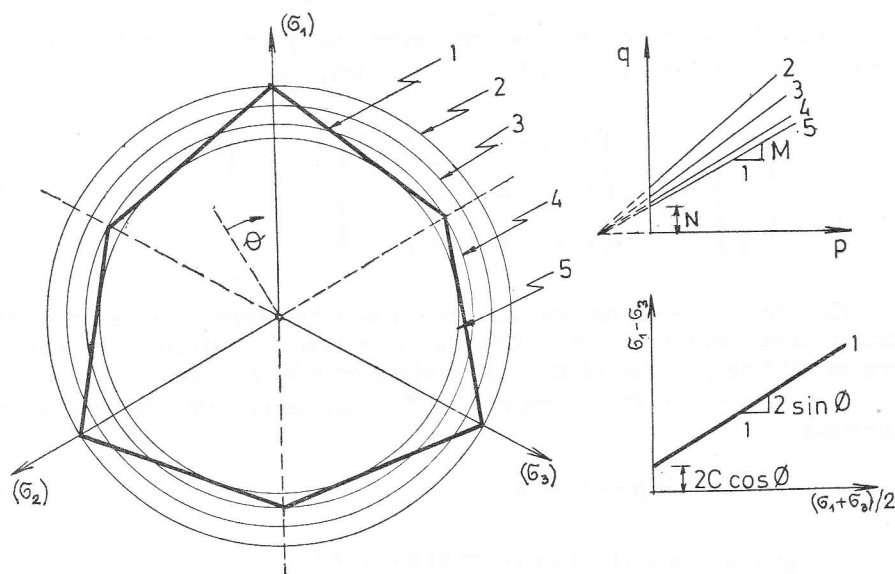
Na Sl. 10 prikazana je linija tečenja »I« Mohr-Coulomb-a i njene zaobljene aproksimacije za prošireni uslov Von Mises-a, dobijen za karakteristične vrednosti Θ . Isti uslovi prikazani su i u vidu karakterističnih pravih analogno Coulomb-ovoj pravoj.

Za $\Theta = \pi/6$ šestougaonik roglja »1« se redukuje u krug konusa »2«, koji se može nazvati konus aksijalne kompresije. On se sa rogljem Mohr-Coulomb-a poklapa po izvodnicama kroz spoljašnje uglove roglja, čije tačke odgovaraju lomu pri aksijalnoj kompresiji u triaksijalnom aparatu.

Za $\Theta = -\pi/6$ površina (29) se redukuje u konus sa krugom »4«, koji je nazvan konusom aksijalne ekstenzije. Između poslednja dva uslova je tzv. kompromisni konus »3«.

Konus »5« nazvaćemo konus Drucker-a i Prager-a jer ima istu funkciju tečenja. On je »upisan« u rogalj Mohr-Coulomb-a i predstavlja donju granicu ove površine. Dobija se minimiziranjem (29) u zavisnosti od Θ , a najmanja vrednost f postiže se za

$$\Theta = 2 \arctg \left| \left(\sqrt{3} - \sqrt{3 + \sin^2 \varnothing} \right) / \sin \varnothing \right| \quad (31)$$



Sl. 10. Opšti (linearizovani) i približni (zaobljeni) oblici uslova tečenja (29)

Funkcije tečenja za uslove »1« — »5« mogu se, prema jednačini (29) ispisati sa vrednostima parametara datim u tabeli 1.

Tabela 1. Parametri M i N u jednačini (29)

U s l o v	M	N
1. Mohr-Coulomb	$\frac{3 \sin \varnothing}{\sqrt{3} \cos \Theta - \sin \Theta \sin \varnothing}$	$\frac{3 c \cos \varnothing}{\sqrt{3} \cos \Theta - \sin \Theta \sin \varnothing}$
2. Konus kompresije	$\frac{6 \sin \varnothing}{3 - \sin \varnothing}$	$\frac{6 c \cos \varnothing}{3 - \sin \varnothing}$
3. Kompromisni konus	$2 \sin \varnothing$	$2 c \cos \varnothing$
4. Konus ekstenzije	$\frac{6 \sin \varnothing}{3 + \sin \varnothing}$	$\frac{6 c \cos \varnothing}{3 + \sin \varnothing}$
5. Drucker-Prager	$\frac{3 \sin \varnothing}{\sqrt{3 + \sin^2 \varnothing}}$	$\frac{3 c \cos \varnothing}{\sqrt{3 + \sin^2 \varnothing}}$

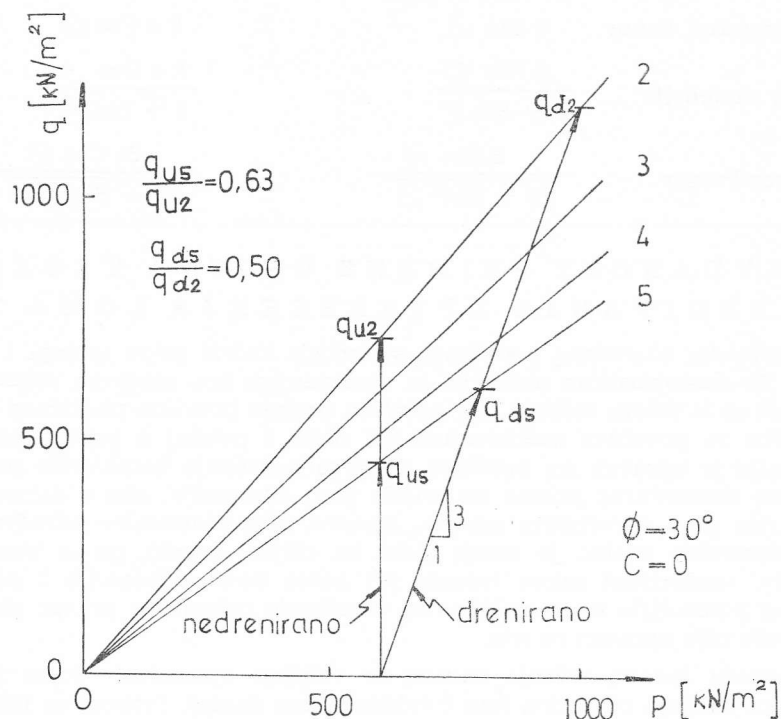
OPRAVDANOST PRIMENE USLOVA TEČENJA U ODREĐIVANJU OPTEREĆENJA LOMA TLA

Definicija plastičnog ponašanja materijala sadrži uslov tečenja i zakon tečenja. Za elastoplastičan materijal sa ojačavanjem tzv. asocirani zakon tečenja izvodi se iz uslova tečenja čija površina postaje površina plastičnog potencijala. Ona se povećava zadržavajući isti oblik i položaj a pravac plastične deformacije je upravan na površinu. Ovakvo ponašanje karakteriše priraštaj zapremine elementarne prizme materijala (tzv. dilatancija) ako u uslovu tečenja figurira prva invarijanta napona. Stvarni, eksperimentalno određeni priraštaj zapremine znatno je manji (osim za zbijeni pesak), pa se zbog toga uvodi tzv. neasocirani zakon tečenja pri kome nema dilatancije i površina plastičnog potencijala se ne poklapa sa površinom tečenja pa pravac plastične deformacije nije upravan na nju.

Pomoću zakona tečenja računa se veličina opterećenja loma tla pri čemu uslov tečenja očigledno ima fundamentalan značaj. Intenzivna istraživanja adaptiraju klasične i donose nove uslove tečenja tla u skladu sa eksperimentalnim rezultatima. Oni ukazuju da površina tečenja treba da bude bez uglova, da leži između roglja Mohr-Coulomb-a i konusa aksijalne kompresije, sa zaobljenim temenim delom s obzirom na rapidno opadanje čvrstoće u zoni zatezanja, sa izvodnicom zakrivljenom analogno anvelopi Mohr-a i sa elipsoidnom »kapom« kojom je površina tečenja zatvorena i u zoni pritiska, koja se uvećava i udaljava za materijal sa ojačavanjem.

Pokazano je da uslov Mohr-Coulomb-a više odgovara eksperimentalnim rezultatima nego prošireni uslov Tresca-e i konus kompresije Von Mises-a »2« na Sl. 10. i da sva tri koincidiraju za $\Theta = 30^\circ$ (Bishop, 1966). Za ravnu deformaciju važi i primenjuje se uslov Mohr-Coulomb-a u vidu (22) ili (23), koji je dovoljno jednostavan.

S obzirom da čvrstoća i nosivost tla zavise od efektivnih napona, neophodno je pored pravilnog izbora uslova loma uzeti u obzir i uslove dreniranja. Uslovi dreniranja tla utiču na veličinu opterećenja loma i na izbor uslova tečenja prema sledećem: u nedreniranim uslovima ravne deformacije normalno konsolidovanog tla stvarno opterećenje loma je manje nego prema uslovu Mohr-Coulomb-a pa s obzirom da Θ teži nuli može se koristiti konus aksijalne ekstenzije ($\approx 4^\circ$ na Sl. 10.); u dreniranim uslovima, pri kojima se javlja ojačavanje, Θ varira šire a opterećenje je blizu onog prema Mohr-Coulomb-u i neasociranom zakonu tečenja pa se može primeniti kompromisni konus ($\approx 3^\circ$). Slika 11 (Naylor, 1978) prikazuje puteve napona i odnose napona loma za oba uslova dreniranja i za različite uslove tečenja označene kao na sl. 10.

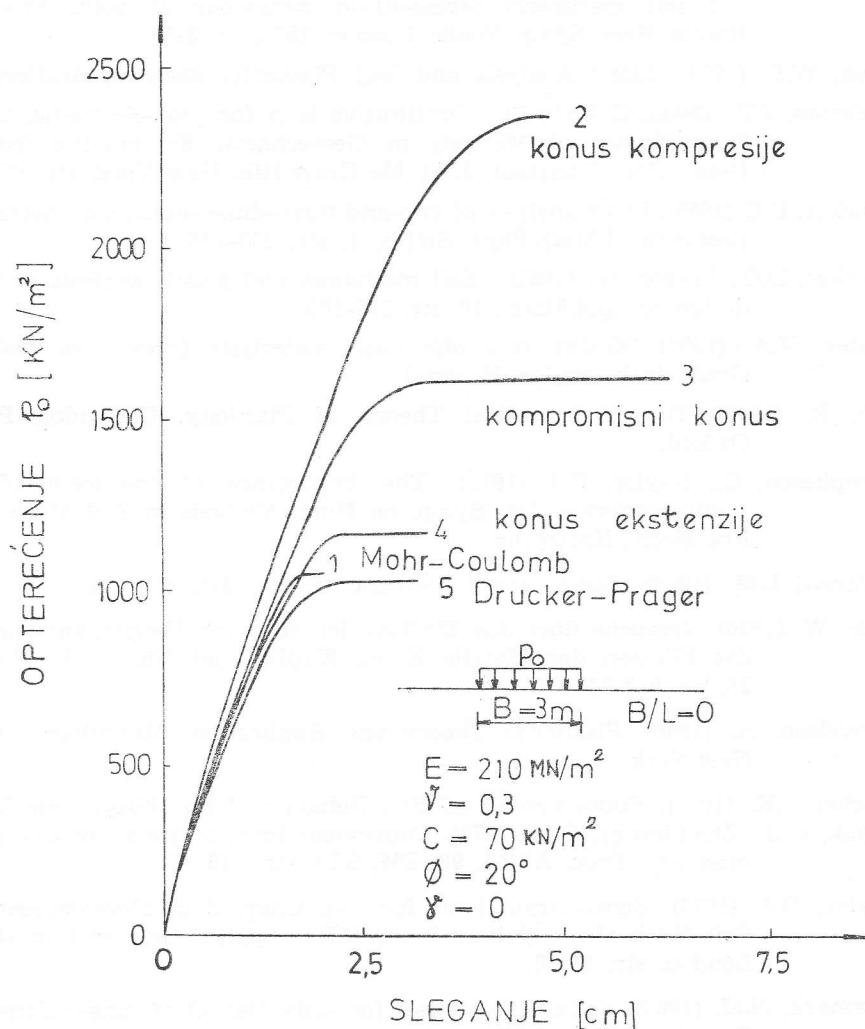


Sl. 11. Uticaj uslova tečenja na napon loma pri različitim uslovima dreniranja

Vidi se da su u dreniranim uslovima napon loma i uticaj uslova tečenja znatno veći nego u (elastičnom) stanju sa sprečenim dreniranjem.

Zienkiewicz i dr. (1975) probleme stabilnosti tla rešavaju istim postupkom za različite uslove tečenja i upoređuju rešenja tražeći ono koje se najviše slaže sa eksperimentalnim podacima. Tako i Humpheson i Naylor (1975) numerički, metodom konačnih elemenata, određuju opterećenje loma tla ispod fleksibilne stope za sve uslove loma sa Sl. 10. Za kružno opterećenje ($B = 3\text{m}$) opterećenje loma prema »1« bilo je na sredini između opterećenja prema »2«

i »5« koja su od prvog odstupala za $\pm 30\%$. Kako se vidi na Sl. 12, opterećenje loma za trakasto opterećenje prema uslovu »1« blizu je onog prema »5« a više nego dva puta je manje od onog prema uslovu »2«. Rezultati na bazi asociranog i neasociranog zakona tečenja se malo razlikuju.



Sl. 12. Uticaj uslova tečenja na opterećenje loma dreniranog tla ispod trakastog elastičnog temelja (asocirani zakon tečenja).

Oдавде се закључује да конус аксијалне компресије не треба користити, јер даје несигурне резултате, а да услов Mohr-Coulomb-а може дати грешку на страни сигурности (носивост мању од стварне), што би могло бити потврђено експериментима.

B I B L I O G R A F I J A

- Bishop, A.W. (1966), The strength of soils as engineering materials. *Geotechnique*, 16, 2, str. 91-128.
- Bishop, A.W. (1971). Shear-strength parameters for undisturbed and remoulded soil specimens. *Stress-strain Behaviour of Soils*, Proc. of Roscoe Mem. Symp. Foulis, London, 1972, str. 3-58.
- Chen, W.F. (1975). *Limit Analysis and Soil Plasticity*. Elsevier, Amsterdam.
- Christian, J.T., Desai, C.S. (1977). Constitutive laws for geologic media. Chap. 2 in *Numerical Methods in Geotechnical Engineering* (editors Desai, C.S., Christian, J.T.), Mc Graw-Hill, New York, str. 65-115.
- Drucker, D.C (1953). Limit analysis of two-and three-dimensional soil mechanics problems. *J.Mech.Phys. Solids*, 1, str. 217-226.
- Drucker, D.C., Prager, W. (1952). Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Q.Appl.Math.*, 10, str. 175-165.
- Gastev, V.A. (1966) *Kratki kurs otpornosti materijala (prevod sa ruskog)*. Građevinska knjiga, Beograd.
- Hill, R. (1950) *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford.
- Humpheson, C., Naylor, D.J. (1975). The importance of the form of the failure criterion. *Int. Symp. on Num. Methods in Soil Mech. and Roc Mech.*, Karlsruhe.
- Kačanov, L.M. (1956). *Osnovi teorii plastičnosti*. Gosizdat, Moskva.
- Lode, W. (1926). Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. *Z. Physik*, 36, str. 913-939.
- Mendelson, A. (1968). *Plasticity: Theory and Application*. Macmillan Comp., New York.
- Mitchel, J.K. (1976). *Fundamentals of Soil Behavior*. John Wiley, New York.
- Nayak, G.C., Zienkiewicz, O.C. (1972). Convenient form of stress invariant for plasticity. *Proc. ASCE*, 98, EM, ST4, str. 949-954.
- Naylor, D.J. (1978). Stress-strain laws for soil. Chap. 2 in *Developments in Soil Mechanics-1* (Editor Scott, C.R.), Applied Science Publishers, London, str. 39-68.
- Newmark, N.M. (1960). Failure hypotheses for soils. *Res. Conf. Shear Strength Cohesive Soils*, ASCE, str. 17-32.
- Prager, W., Hodge, P.G. (1951). *Theory of perfectly Plastic Solids*. John Wiley, New York.
- Radenković, D. (1960). *Mechanique des Sols: Cours de Plasticite (skripta)*. Université de Grenoble, 1960/61.
- Salencon, J. (1974). *Teorie de la Plasticite pour les Applications a la Mecanique des Sols*. Eyroles, Paris.

- Thomas, T.Y. (1961). Plastic Flow and Fracture in Solids, Vol. 2. Academic Press, London.
- Westergaard, H.M. (1920). On the resistance of ductile materials to combined stresses. J. Franklin Inst., 189, str. 627-640.
- Yong, R.N., Warkentin, B.P. (1975). Soil Properties and Behaviour. Elsevier, Amsterdam.
- Zienkiewicz, O. C., Humpheson, C., Lewis, R.W. (1975). Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics. Geotechnique, 25,4, str. 671-689.
- Zienkiewicz, O.C., Humpheson, C., Lewis, R.W. (1975). A unified approach to soil mechanics problems. Chap. 4 in Finite Elements in Geomechanics (editor Gudehus, G). John Wiley, London, 1977, str. 151-177.
- Zienkiewicz, O.C., Pande, G.N. (1975). Some useful forms of isotropic yield surfaces for soil and rock mechanics. Chap. 5 in Finite Elements in Geomechanics (editor Gudehus, G.), John Wiley, London, 1977, str. 179-190.
- Zienkiewicz, O.C., Humpheson, C. (1977). Viscoplasticity: A generalized model for description of soil behavior. Chap. 3 in Numerical Methods in Geotechnical Engineering (editors Desai, C.S., Christian, J.T.), McGraw-Hill, New York, str. 116-147.
- Zienkiewicz, O.C. i dr. (1977). A unified approach to the soil mechanics problems of offshore foundations. Chap. 12 in Numerical Methods in Offshore Engineering (editors Zienkiewicz, O.C. et. al.), John Wiley, Chichester, 1978, str 361-411.

ABSTRACT

CLASSICAL YIELD CRITERIA FOR SOIL AND JUSTIFIABLENESS OF THEIR APPLICATION TO SOIL BEARING CAPACITY ESTIMATION

It has pointed at significance of yield criteria in forming of nonlinear material models founded at theory of plasticity and a general yield criterion for an isotrope material with regard to work hardening has described in the paper. The classical yield criteria for soil have presented and a new form of Mohr-Coulomb criterion like a general yield function where other ones like special functions result from has derived. The conclusions about justifiableness of the application of separate yield criteria to the soil bearing capacity estimation, on the basis of bearing capacity calculated for diferent yield criteria by finite element method and experimental data from bibliography, have presented.